

Meßgenauigkeit und Meßfehler

- Unvermeidbare Ungenauigkeiten
- Messung nur mit endlicher Genauigkeit möglich
- Systematische Fehler (Ablesefehler, Gerätefehler, äußere Einflüsse)
- Zufällige Fehler (statistische Fehler)
- Fehlerrechnung
- Meßungenauigkeit bedeutet **NICHT** Abweichung vom wahren Wert (z.B. Literaturwert) und hat nichts mit Irrtum zu tun.



Fehlerrechnung

- Maß für die Güte (Reproduzierbarkeit) der Messung
- Sind 2 Messungen miteinander verträglich ?
- Weichen 2 Messungen **SIGNIFIKANT** voneinander ab ?
- Welche Meßgröße liefert den größten Beitrag zum Fehler ?
- Welche Größe muß ich daher besonders genau messen?



Fehlerabschätzung

- Folge von Messungen : x_i
- Arithmetischer Mittelwert:
(Beste Näherung zum wahren Wert)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Summe der Quadrate der Abweichungen hat ein Minimum (Gauß Methode der kleinsten Quadrate)



Standardabweichung = Mittlerer Fehler der Einzelmessung

- Streuung der Meßwerte:
Mittelwert der Größen:

$$(x_i - \bar{x})^2$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$



Mittlerer Fehler des Mittelwertes

- Der Mittelwert von n Messungen ist genauer als eine Einzelmessung. (Voneinander unabhängige Werte, gemessen mit derselben Meßeinrichtung)

$$\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

- Fehler nur sinnvoll, wenn Meßwerte normalverteilt.



- 4 Einzelmessungen : $x_i = 28,5; 28,9; 29,2; 29,1$ [ms]
- Mittelwert: $\bar{x} = (28,5 + 28,9 + 29,2 + 29,1)/4 = 28,9$
- Mittlerer Fehler der Einzelmessung

$$s = \sqrt{\frac{(0,4)^2 + (0,0)^2 + (0,3)^2 + (0,2)^2}{4-1}} = \sqrt{\frac{0,29}{3}} = 0,31$$

- Mittlerer absoluter Fehler des Mittelwertes

$$\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,31}{\sqrt{4}} = 0,155$$

- Relativer Fehler des Mittelwertes

$$\frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}} = \frac{0,155}{28,9} = 0,00536 \equiv 0,54\%$$

- Ergebnis : $(28,9 \pm 0,16) \text{ ms}$
 $28,9 \text{ ms} \pm 0,54\%$



Fehlerfortpflanzung

- Berechnung mit Gauß'schem Fehlerfortpflanzungsgesetz (teilweise Kompensation der Fehler)

- Summe oder Differenz: $z = x + y$ bzw. $z = x - y$

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

- Produkt oder Quotient : $z = x \cdot y$ bzw. $z = x / y$

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$



Messung der Schallgeschwindigkeit(1)

- $v = s/t$; $s = (10,00 \pm 0,01) \text{ m}$; $t = (28,9 \pm 0,155) \text{ ms}$
- Relativer Fehler von s : $(0,01/10,00)$: 1 ‰
- Relativer Fehler von t : $(0,155/28,9)$: 5.4 ‰
- Der relative Fehler von v muß mindestens so groß wie der größte Einzelfehler und kleiner als die Summe der Einzelfehler sein, d.h. er muß zwischen 5.4 ‰ und 6.4 ‰ liegen.



Schallgeschwindigkeit(2)

- Die Rechnung mit Hilfe der obigen Formel liefert.

$$\frac{\Delta v}{v} = \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2} =$$
$$\sqrt{\left(\frac{0,155ms}{28,9ms}\right)^2 + \left(\frac{0,01m}{10,00m}\right)^2} = 0,0054497$$

- d.h. 5,4 ‰
- $v = (346,02 \pm 1,89) \text{ m/s}$ oder $v = 346,02 \text{ m/s} \pm 5,4 \text{ ‰}$



Signifikanz von Unterschieden(1)

- 2 Meßwerte : $A = 24.0 \pm 0.5$ und $B = 19.0 \pm 2.2$
- Wie groß ist der Fehler von $C = A - B$?

$$\Delta C = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2} = \sqrt{(0,5)^2 + (2,2)^2}$$
$$= 2,256$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{2,256}{5} = 0,4512 = 45,12\%$$

- Aufgabe: Wie groß sind die Fehler für $D = A + B$?
- Lösung s.₁₀ Praktikumsanleitung



Signifikanz von Unterschieden(2)

- Ist der Unterschied zwischen A und B signifikant?
- Da

$$\frac{C}{\Delta C} = \frac{5}{2,256} = 2,216$$

- kleiner als 3 **ist**, **ist der Unterschied** nicht signifikant.
- Weitere Hinweise dazu : s. Praktikumsanleitung.

